Über algebraische Funktionen,

insbesondere über das Fundamentalsystem eines algebraischen Körpers.

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde

der hohen naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität Tübingen

vorgelegt von

ADOLF LAUTH.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Borna-Leipzig
Buchdruckerei Robert Noske
1913.

Von der Fakultät angenommen am 24. Mai 1913.

Meinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. Alexander v. Brill

in Dankbarkeit gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547017_0052

Inhaltsverzeichnis.

		Seite
	Einleitung	7
1.	Algebraischer Teiler und Wurzelausdrücke	8
2.	Nebenfunktionen	11
3.	Basis, Diskriminante und Modul	13
4.	Umformung der Basis eines Moduls	17
5.	Nebenfundamentalsystem	20
6.	Möglichkeit der Herstellung eines Nebenfundamentalsystems	23
7.	Rationale Herstellung eines Nebenfundamentalsystems	25
8.	Kubischer Körper	29
9.	Nachträgliche Vereinfachungen	32
10.	Trinomischer Körper	34
11.	Reduzierte Elementarteiler und Riemannsche Fläche	35

Verzeichnis der verwendeten Benennungen.

Seite

Algebraischer Teiler 9
Äquivalente Systeme 16
Basis 15
Binomischer Körper 22
Diskriminante 16
Elementarteiler 36
Fundamentalsystem 20
Fundamentale Nebenfunktion 12
Ganzer Wurzelausdruck 8
Ganze Nebenfunktion 12
Gebiet von Nebenfunktionen 14
Größter gemeinsamer Teiler 8
Kleinste zu einer algebraischen Funktion gehörige ganze alg. Funktion . 13
Kolonnenkerne der Diskriminante 24
Kubischer Körper 29
Modul 16
Nächst höhere (niedere) zu einem Wurzelausdruck gehörige rat. Funktion 10
Nächst höhere (niedere) zu einer fund. Nebenfunktion gehörige alg. Funktion 13
Nebenfundamentalsystem 20
Nebenfunktion 12
Normale Systeme 35
Reduzierter Elementarteiler 36
Reduzierter Wurzelausdruck 9
Rest eines Wurzelausdrucks 10
Rest einer algebraischen Funktion 13
Spur 16
Supplement eines Wurzelausdrucks 10
Supplement einer algebraischen Funktion 13
Teilerfremd 10
Trinomischer Körper 34
Wurzelausdruck 8

Einleitung.

Im folgenden wird der Versuch unternommen, ein bekanntes Problem aus der Theorie der algebraischen Funktionen auf rein algebraischer Grundlage und mit rein algebraischen Hilfsmitteln zu behandeln. Insbesondere wird von dem funktionentheoretischen Hilfsmittel der Potenzreihenentwicklung völlig abgesehen. Dies macht die Einführung von Bildungen notwendig, welche die rationale Ausführung der Operationen unmittelbar gestatten, ohne die rechnerische Durchführung in jedem Beispiel unübersehbar zu machen.

Als Ausgangspunkt für die Herstellung eines Fundamentalsystems dient der von Herrn Hensel eingeführte Begriff des algebraischen Teilers, welcher gewöhnlich einen „Wurzelausdruck“ bildet, d. h. einen Ausdruck, von dem eine bestimmte Potenz eine rationale Funktion der unabhängigen Veränderlichen ist. Produkte aus algebraischen Funktionen und solchen Wurzelausdrücken („Nebenfunktionen“), vermöge deren sich hier die Potenzreihen vollständig ausschalten lassen, bilden alsdann die Grundlage für die folgenden Entwicklungen.

Nachdem die bekannten Grundbegriffe der Theorie der algebraischen Funktionen auf diese allgemeineren Formen übertragen und gewisse Abweichungen festgestellt sind, werden jene Nebenfunktionen für die rationale Herstellung eines „Nebenfundamentalsystems“ verwendet. Mit diesem erhält man stets auch ein Fundamentalsystem (Art. 5), sowie die Elementarteiler und die reduzierten Elementarteiler von Herrn Hensel (Art. 11), und zwar alle gleich explicit. Ein solches System, welches nach 11. die Besonderheiten der zur Grundgleichung gehörigen Riemannschen Fläche direkt erkennen läßt, wird in Art. 7 allgemein, in Art. 5, 8 und 10 in näherer Ausführung für gewisse besondere Funktionenkörper dargestellt.

1. Algebraischer Teiler und Wurzelausdrücke.

Durch eine irreduzible algebraische Gleichung

$$f(y, x) = y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \cdots + a_n = 0,$$

in welcher $a_1, a_2, \cdots a_n$ rationale Funktionen von x sind, wird ein Körper algebraischer Funktionen von x definiert. Dieser umfaßt alle rationalen Funktionen der von einander abhängigen Veränderlichen y und x, d. h. alle rationalen Funktionen von y und x mit der Nebenbedingung $f(y, x) = 0$.

Mit Hilfe von $f(y, x) = o$ kann man für jede Funktion η des Körpers eine Gleichung vom Grade n in η

$$F(\eta, x) = \eta^n + b_1 \eta^{n-1} + b_2 \eta^{n-2} + \cdots + b_n = o$$

ableiten, wo wieder die Koeffizienten rationale Funktionen von x sind.

Von expliciten Funktionen der Variabeln x werden in der Folge außer den rationalen noch die „Wurzelausdrücke“ [1]) benützt werden, d. h. solche Funktionen, von denen eine bestimmte Potenz eine ganze rationale Funktion von x ist. Sind es Ausdrücke, von denen eine bestimmte Potenz eine ganze rationale Funktion von x ist, so wird man sie ganze Wurzelausdrücke nennen. Der „größte gemeinsame Teiler“ [2]) $\dot{A}$ der Wurzelausdrücke [3]) $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \cdots \dot{A}_m$ werde durch die Eigenschaft charakterisiert, daß die Quotienten $\frac{\dot{A}_1}{\dot{A}}, \frac{\dot{A}_2}{\dot{A}}, \cdots \frac{\dot{A}_m}{\dot{A}}$ keinen ihrer Faktoren in negativer Potenz und keinen Faktor alle zugleich enthalten.

Der größte gemeinsame Teiler der aus $F(\eta, x) = o$ entnommenen Wurzelausdrücke

$$b_1, b_2^{\frac{1}{2}}, \cdots b_n^{\frac{1}{n}}$$

---

[1]) Herr Hensel gebraucht hierfür im Journal für Math., Bd. 115, die Bezeichnung „Wurzelfunktion“.

[2]) Vgl. zur Definition Hensel und Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln, S. 148/49.

[3]) Diese sind im folgenden durch lateinische Buchstaben mit einem Punkt darüber, rationale Funktionen einfach durch lateinische, algebraische durch griechische Buchstaben bezeichnet.

heißt der algebraische Teiler[1]) von η, $\dot{t}(\eta)$. Dieser hat die Form

$$\dot{t}(\eta) = h_1 \, h_2^{\frac{1}{2}} \cdots h_n^{\frac{1}{n}},$$

wo $h_1, h_2, \cdots h_n$ rationale Funktionen von x sind. Der Teiler $\dot{t}(\eta)$ ist nach dem Vorstehenden nur dann ein ganzer Wurzelausdruck, wenn $b_1, b_2, \cdots b_n$ ganze rationale Funktionen von x sind, also η eine ganze algebraische Funktion von x ist.

Die Bestimmung von $\dot{t}(\eta)$ kann auf rationalem Weg erfolgen und führt zu einer Beziehung

$$b_k^{\frac{1}{k}} = \dot{B}_k \, \dot{t}(\eta) \qquad (k = 1, 2, \cdots n),$$

wo $\dot{B}_1, \dot{B}_2, \cdots \dot{B}_n$ nach der Definition des algebraischen Teilers und des größten gemeinsamen Teilers ganze Wurzelausdrücke sind, welche keinen Faktor alle zugleich enthalten.

Hat man beispielsweise

$$F(\eta, x) = \eta^3 + x\,\eta^2 + \frac{x^3}{x^2 - 1}\,\eta + \frac{x^4}{(x-1)^7} = 0,$$

so ist $b_1 = x$, $b_2^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}} (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$, $b_3^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}} (x-1)^{-\frac{7}{3}}$;

$$\dot{t}(\eta) = \frac{x}{(x+1)^{\frac{1}{2}} (x-1)^{\frac{7}{3}}};$$

$$\dot{B}_1 = (x+1)^{\frac{1}{2}} (x-1)^{\frac{7}{3}}, \qquad \dot{B}_2 = x^{\frac{1}{2}} (x-1)^{\frac{11}{6}}, \qquad \dot{B}_3 = x^{\frac{1}{3}} (x+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Unter einem reduzierten[2]) Wurzelausdruck werde ein ganzer Wurzelausdruck in x verstanden, welcher keine ganz rationale Funktion von x anders als in echt gebrochener Potenz zum Teiler besitzt. Hat man einen beliebigen Wurzelausdruck

$$\dot{b} = h_1 \, h_2^{\frac{1}{2}} \cdots h_m^{\frac{1}{m}},$$

wo $h_1, h_2, \cdots h_m$ beliebige rationale Funktionen von x sind, so

---

[1]) Vgl. Hensel, Journal für Math. 111, S. 142; Hensel u. Landsberg, Theorie der alg. Funktionen, S. 166.

[2]) Hensel, Journal für Math., Bd. 115.

kann man zwei reduzierte Wurzelausdrücke $\dot{s}(\dot{b})$ und $\dot{r}(\dot{b})$ derart bestimmen, daß

$$b' = \dot{b}\,\dot{s}(\dot{b}) \quad \text{und} \quad b'' = \frac{\dot{b}}{\dot{r}(\dot{b})}$$

rationale Funktionen von x sind, und zwar ist diese Bestimmung eindeutig. Wir werden in der Folge b′ als die nächst höhere, b″ als die nächst niedere zu $\dot{b}$ gehörige rationale Funktion von x bezeichnen. Ebenso soll $\dot{r}(\dot{b})$ der Rest und $\dot{s}(\dot{b})$ das Supplement von $\dot{b}$ heißen.

Das Produkt der reduzierten Wurzelaudrücke $\dot{r}(\dot{b})$ und $\dot{s}(\dot{b})$

$$\dot{r}\,\dot{s} = \frac{b'}{b''}$$

ist eine ganze rationale Funktion von x. Da ein Faktor (x—c) in einem reduzierten Wurzelausdruck nur in echt gebrochener Potenz auftritt, so kann $\dot{r}\,\dot{s} = \frac{b'}{b''}$ keinen Faktor in höherer als der ersten Potenz enthalten. Andererseits muß nach dieser Darstellung jeder Faktor, der in $\dot{r}(\dot{b})$ auftritt, auch in $\dot{s}(\dot{b})$ in echt gebrochener Potenz auftreten, da $\dot{r}\,\dot{s}$ eine ganze rationale Funktion ist.

Man nehme z. B.

$$\dot{b} = x^{\frac{7}{3}}(x+1)^{\frac{9}{2}}(x-1)^{-\frac{1}{5}}(x^2+1)^{-\frac{11}{4}},$$

so wird

$$\dot{s}(\dot{b}) = x^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{1}{5}}(x^2+1)^{\frac{3}{4}},$$

$$\dot{r}(\dot{b}) = x^{\frac{1}{3}}(x+1)^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{4}{5}}(x^2+1)^{\frac{1}{4}},$$

$$b' = \dot{b}\,\dot{s}(\dot{b}) = x^3(x+1)^5(x^2+1)^{-2}$$

$$b'' = \frac{\dot{b}}{\dot{r}(\dot{b})} = \frac{x^2(x+1)^4}{(x-1)(x^2+1)^3}, \qquad \dot{r}\,\dot{s} = \frac{b'}{b''} = x(x^4-1).$$

Hat man r beliebige ganze Wurzelausdrücke $\dot{w}_1, \dot{w}_2, \cdots \dot{w}_r$ in x, die keinen Faktor alle zugleich enthalten oder „teilerfremd“ sind, so sind die zugehörigen nächst höheren rationalen Funktionen von x auch ganz und teilerfremd. Denn die nächst höheren ganzen rationalen Funktionen $w_1' = \dot{w}_1\,\dot{s}(\dot{w}_1)$, $w_2' = \dot{w}_2\,\dot{s}(\dot{w}_2)$, $\cdots$ $w_r' = \dot{w}_r\,\dot{s}(\dot{w}_r)$, wo die $\dot{s}$ die Supplemente der Wurzelausdrücke sind,

könnten höchstens einen reduzierten Wurzelausdruck zum gemeinsamen Teiler besitzen, was bei rationalen Funktionen ausgeschlossen ist. Daraus kann man einen wichtigen Satz folgern:

Besitzen r Wurzelausdrücke $\dot{b}_1, \dot{b}_2, \cdots \dot{b}_r$ *den größten gemeinsamen Teiler* $\dot{b}$, *so lassen sich r ganze Wurzelausdrücke* $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots \dot{q}_r$ *so bestimmen, daß*

$$\dot{q}_1 \dot{b}_1 + \dot{q}_2 \dot{b}_2 + \dot{q}_r \dot{b}_r = \dot{b}$$

wird.

Setzt man nämlich

$$\dot{b}_k = \dot{b}\, \dot{w}_k \qquad (k = 1, 2, \cdots r)$$

so sind die Wurzelausdrücke $\dot{w}_1, \dot{w}_2, \cdots \dot{w}_r$ und damit die nächst höheren zugehörigen ganzen rationalen Funktionen $w_1', w_2', \cdots w_r'$ teilerfremd, wenn $\dot{b}$ der größte gemeinsame Teiler von $\dot{b}_1, \dot{b}_2, \cdots \dot{b}_r$ ist. Man kann daher r ganze rationale Funktionen $q_1, q_2, \cdots q_r$ so bestimmen, daß

$$q_1 w_1' + q_2 w_2' + \cdots + q_r w_r' = 1$$

wird. Setzt man also

$$\dot{q}_k = q_k \dot{s}(\dot{w}_k) \qquad (k = 1, 2, \cdots r),$$

wo wieder $\dot{s}(\dot{w}_k)$ das Supplement von $\dot{w}_k$ und demnach $w_k' = \dot{w}_k \dot{s}(\dot{w}_k)$ ist, so sind $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots \dot{q}_r$ ganze Wurzelausdrücke, und man hat die gesuchte Beziehung

$$\dot{q}_1 \dot{b}_1 + \dot{q}_2 \dot{b}_2 + \cdots + \dot{q}_r \dot{b}_r = \dot{b}.$$

2. Nebenfunktionen.

Kehrt man wieder zum algebraischen Teiler zurück (S. 9) und setzt

$$\mathring{\eta} = \frac{\eta}{\dot{t}(\eta)},$$

so genügt $\mathring{\eta}$ einer Gleichung

$$\mathring{\eta}^n + \dot{b}_1 \mathring{\eta}^{n-1} + \cdots + \dot{b}_n = 0,$$

wo mit der Bezeichnungsweise von 1. der Wurzelausdruck

$$\dot{b}_k = \frac{b_k}{\dot{t}(\eta)^k} = \dot{B}_k^k \qquad (k = 1, 2, \cdots n)$$

ist. Da nun $\dot{B}_1, \dot{B}_2, \cdots \dot{B}_n$ teilerfremd sind, so gilt dasselbe von

$\dot{b}_1, \dot{b}_2, \cdots \dot{b}_n$, und $\mathring{\eta}$ genügt einer Gleichung n^{ten} Grades, deren Koeffizienten ganze Wurzelausdrücke ohne gemeinsamen Teiler sind. Dies ist eine ganz charakteristische Eigenschaft.

Nennt man nämlich allgemein das Produkt aus einer algebraischen Funktion η und einem Wurzelausdruck:

$$\dot{\eta} = \eta \, \dot{b}$$

eine „Nebenfunktion“ von η, so bildet $\mathring{\eta}$ die scharfe Grenze zwischen denjenigen Nebenfunktionen von η, welche im Endlichen nirgends, und denen, die an einzelnen Stellen unendlich werden. Die Funktion $\mathring{\eta}$ ist die kleinste Nebenfunktion von η, welche für jeden endlichen Wert von x endlich bleibt, und möge als fundamentale Nebenfunktion von η bezeichnet werden.

In dem Beispiel von 1. ist

$$\mathring{\eta} = \frac{\eta}{\dot{t}\,(\eta)} = \eta\,(x+1)^{\frac{1}{2}}\,(x-1)^{\frac{7}{3}}\,x^{-1}$$

die zu η gehörige fundamentale Nebenfunktion, und ihre Gleichung wird

$$\mathring{\eta}^3 + (x+1)^{\frac{1}{2}}\,(x-1)^{\frac{7}{3}}\,\mathring{\eta}^2 + x\,(x-1)^{\frac{11}{3}}\,\mathring{\eta} + x\,(x+1)^{\frac{3}{2}} = 0\,.$$

Man erkennt leicht, daß jedes Produkt von $\mathring{\eta}$ mit einem ganzen Wurzelausdruck eine allenthalben im Endlichen endliche oder ganze Nebenfunktion von η ist, während das Produkt von $\mathring{\eta}$ mit einem gebrochenen Wurzelausdruck im Endlichen ebenso wie der Wurzelausdruck unendlich wird, und so als gebrochene Nebenfunktion von η bezeichnet werden kann. Unter den Koeffizienten der Gleichung, welcher das Produkt genügt, befinden sich im ersten Fall ausschließlich ganze, im zweiten auch gebrochene Wurzelausdrücke.

Das Produkt zweier fundamentalen Nebenfunktionen $\mathring{\eta}_1$ und $\mathring{\eta}_2$ ist wie diese für alle endlichen Werte von x endlich oder eine ganze Nebenfunktion, dagegen nicht notwendig eine fundamentale Nebenfunktion.

Hat man z. B.

$$f(y, x) = y^2 + (x^3 - 4) = 0\,,$$
$$\eta_1 = y - 2 + 3x\,,$$
$$\eta_2 = y + 2 + 3x\,,$$

so ist zwar $\dot{t}(\eta_1) = 1$ und $\dot{t}(\eta_2) = 1$, wie man leicht mit geometrischen Überlegungen oder durch Aufstellung der Gleichungen für η_1 und η_2 erkennt. Dagegen ist $\dot{t}(\eta_1 \eta_2) = x$, denn es ist wegen $f(y, x) = 0$

$$\eta_1 \eta_2 = y^2 - 4 + 6xy + 9x^2 = x(6y + 9x - x^2),$$

folglich $\frac{\eta_1 \eta_2}{x}$ im Endlichen allenthalben endlich oder $\eta_1 \eta_2$ durch x algebraisch teilbar.

Jede ganze positive Potenz einer fundamentalen Nebenfunktion ist wieder eine fundamentale Nebenfunktion. Wäre nämlich $\mathring{\eta}^k$ durch den ganzen Wurzelausdruck $\dot{g}$ teilbar, so würde entgegen den Eigenschaften einer fundamentalen Nebenfunktion außer $\mathring{\eta}$ auch $\frac{\mathring{\eta}}{\dot{g}^{\frac{1}{k}}}$ im Endlichen nirgends unendlich werden.

Zu jeder fundamentalen Nebenfunktion $\mathring{\eta}$ kann man zwei reduzierte Wurzelausdrücke $\dot{s}(\eta)$ und $\dot{r}(\eta)$ so bestimmen, daß

$$\eta' = \mathring{\eta}\, \dot{s}(\eta) \text{ und } \eta'' = \frac{\mathring{\eta}}{\dot{r}(\eta)}$$

algebraische Funktionen sind, und zwar ist η' notwendig die kleinste zu η gehörige ganze algebraische Funktion von x. Man kann wieder $\dot{s}(\eta)$ als das Supplement, $\dot{r}(\eta)$ als den Rest von η, η' als die nächst höhere und η'' als die nächst niedere zu $\mathring{\eta}$ gehörige algebraische Funktion bezeichnen. Wegen $\mathring{\eta} = \frac{\eta}{\dot{t}(\eta)}$ ist $\dot{s}(\eta)$ der Rest und $\dot{r}(\eta)$ das Supplement des algebraischen Teilers von η. In dem Beispiel von 1. wird

$$\dot{s}(\eta) = (x+1)^{\frac{1}{2}} (x-1)^{\frac{2}{3}}, \qquad \dot{r}(\eta) = (x+1)^{\frac{1}{2}} (x-1)^{\frac{1}{3}},$$

$$\eta' = \mathring{\eta}\, \dot{s}(\eta) = \frac{\eta (x+1)(x-1)^3}{x}, \quad \eta'' = \frac{\mathring{\eta}}{\dot{r}(\eta)} = \frac{\eta (x-1)^2}{x}.$$

3. Basis, Diskriminante und Modul.

Während eine Kombination von m algebraischen Funktionen $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_m$ mit rationalen Funktionen von x als Koeffizienten

$$u_1 \eta_1 + u_2 \eta_2 + \cdots + u_m \eta_m$$

wieder eine algebraische Funktion ist, gehört eine Form

$$\dot{u}_1 \dot{\eta}_1 + \dot{u}_2 \dot{\eta}_2 + \cdots + \dot{u}_m \dot{\eta}_m ,$$

die aus Nebenfunktionen mit Wurzelausdrücken $\dot{u}$ als Koeffizienten besteht, nicht notwendig wieder zu den Nebenfunktionen, den Produkten aus algebraischen Funktionen und Wurzelausdrücken. Folglich bilden die Nebenfunktionen keinen Körper. Ihre Gesamtheit soll als das zu $f(y, x) = 0$ gehörige Gebiet von Nebenfunktionen bezeichnet sein.

Jede Nebenfunktion des Gebiets

$$\dot{\eta} = \eta \dot{e} ,$$

wo η eine algebraische Funktion des Körpers und $\dot{e}$ ein Wurzelausdruck ist, genügt einer Gleichung

$$\dot{\eta}^n + \dot{b}_1 \dot{\eta}^{n-1} + \cdots + \dot{b}_n = 0$$

mit Wurzelausdrücken als Koeffizienten. Besitzt die algebraische Funktion η nach 1. die Gleichung

$$F(\eta, x) = \eta^n + b_1 \eta^{n-1} + \cdots + b_n = 0$$

mit rationalen Funktionen von x als Koeffizienten, so ist

$$\dot{b}_k = b_k \dot{e}^k \qquad (k = 1, 2, \cdots n) .$$

Für $\dot{e} = \dfrac{1}{\dot{t}(\eta)}$ sind die Koeffizienten $\dot{b}_1, \dot{b}_2, \cdots \dot{b}_n$ nach 2. ganz und teilerfremd und $\dot{\eta}$ ist die fundamentale Nebenfunktion von η. Wenn $\dot{\eta}$ das Produkt aus der fundamentalen Nebenfunktion mit einem ganzen Wurzelausdruck oder eine ganze Nebenfunktion ist, so sind die Koeffizienten $\dot{b}_1, \dot{b}_2, \cdots \dot{b}_n$ alle ganz, und umgekehrt.

Wie sich zeigen wird, bieten die Nebenfunktionen bei der allgemeinen rationalen Herstellung eines Fundamentalsystems Vereinfachungen, wie sie sich mit den algebraischen Funktionen allein wohl schwerlich erreichen ließen, und zwar liegt dies im Grunde genommen daran, daß die Nebenfunktionen und Wurzelausdrücke den bei Verzweigungen auftretenden Verhältnissen leichter gerecht werden können als die algebraischen und die rationalen Funktionen. Es ist daher nötig, die Begriffe „Basis“, „Diskriminante“ und „Modul“ auf diese allgemeineren Formen zu übertragen.

Hat man n Nebenfunktionen

$$\dot{\eta}_i = \eta_i \dot{e}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots n) ,$$

wo die η algebraische Funktionen von x, die $\dot{e}$ Wurzelausdrücke sind, so lassen sich diese mit Hilfe von $f(y, x) = 0$ in eindeutiger Weise in die Form setzen:

(1) $$\dot{\eta}_i = \dot{h}_{i1} + \dot{h}_{i2}\, y + \cdots + \dot{h}_{in}\, y^{n-1}$$
$$= h_{i1}\, \dot{e}_i + h_{i2}\, \dot{e}_i\, y + \cdots + h_{in}\, \dot{e}_i\, y^{n-1},$$

wo

$$i = 1, 2, \cdots n,$$

$$\dot{h}_{ik} = h_{ik}\, \dot{e}_i \qquad (k = 1, 2, \cdots n)$$

und

$$\eta_i = h_{i1} + h_{i2}\, y + \cdots + h_{in}\, y^{n-1}$$

die Darstellung von η_i durch die Basis $(1, y, \cdots y^{n-1})$ ist. Die Koeffizienten $\dot{h}_{ik}$ besitzen dabei den Rest $\dot{r}(\dot{e}_i)$ und das Supplement $\dot{s}(\dot{e}_i)$.

Falls nun die Determinante

$$\dot{H} = |\dot{h}_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \cdots n)$$

nicht identisch verschwindet, so kann man jede Nebenfunktion des Gebiets

(2) $$\dot{\eta} = \eta\, \dot{e} = \dot{h}_1 + \dot{h}_2\, y + \cdots + \dot{h}_n\, y^{n-1} = h_1\, \dot{e} + h_2\, \dot{e}\, y + \cdots h_n\, \dot{e}\, y^{n-1},$$

wo wieder die Koeffizienten $\dot{h}$ denselben Rest und dasselbe Supplement wie $\dot{e}$ besitzen, auch in der Form

$$\dot{\eta} = \dot{w}_1\, \dot{\eta}_1 + \dot{w}_2\, \dot{\eta}_2 + \cdots + \dot{w}_n\, \dot{\eta}_n$$

mit Wurzelausdrücken als Koeffizienten in eindeutiger Weise darstellen, wie sich durch Auflösung der linearen Gleichungen (1) nach den Potenzen von y und Einsetzen in (2) ergibt. Man wird $(\dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \cdots \dot{\eta}_n)$ in diesem Fall, wo $\dot{H}$ von null verschieden ist und alle Nebenfunktionen des Gebiets durch das gegebene System in homogener linearer Form mit Wurzelausdrücken als Koeffizienten darstellbar sind, eine Basis des Gebiets nennen.

Gleichzeitig ist das System $(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n)$ eine Basis des Körpers, indem die rationale Funktion von x

$$H = |h_{ik}| = \left|\frac{\dot{h}_{ik}}{\dot{e}_i}\right| = \frac{\dot{H}}{\dot{e}_1\, \dot{e}_2 \cdots \dot{e}_n}$$

mit $\dot{H}$ von Null verschieden ist. Daher läßt sich η in eindeutiger

Weise durch $(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n)$ mit ganzen rationalen Funktionen von x als Koeffizienten in homogener linearer Form darstellen:

$$\eta = w_1 \eta_1 + w_2 \eta_2 + \cdots + w_n \eta_n .$$

Aus $\dot{\eta} = \eta \dot{e}$ und $\dot{\eta}_i = \eta_i \dot{e}_i$ folgt dann

$$\dot{w}_i \dot{\eta}_i = \dot{e} w_i \eta_i ,$$

und es besitzen somit die Produkte $\dot{w}_i \dot{\eta}_i$ wie $\dot{\eta}$ den Rest $\dot{r}(\dot{e})$ und das Supplement $\dot{s}(\dot{e})$.

Die Diskriminante einer Basis $(\dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \cdots \dot{\eta}_n)$ des Gebiets wird

$$D_{\dot{\eta}} = \begin{vmatrix} S(\dot{\eta}_1 \dot{\eta}_1) & S(\dot{\eta}_1 \dot{\eta}_2) \cdots S(\dot{\eta}_1 \dot{\eta}_n) \\ S(\dot{\eta}_2 \dot{\eta}_1) & S(\dot{\eta}_2 \dot{\eta}_2) \cdots S(\dot{\eta}_2 \dot{\eta}_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ S(\dot{\eta}_n \dot{\eta}_1) & S(\dot{\eta}_n \dot{\eta}_2) \cdots S(\dot{\eta}_n \dot{\eta}_n) \end{vmatrix} = |S(\dot{\eta}_i \dot{\eta}_k)|,$$

wo $S(\dot{\eta}_i \dot{\eta}_k)$ die Spur[1]) des Produktes $\dot{\eta}_i \dot{\eta}_k$ bedeutet. Bei Bezeichnung der Diskriminante von $(1, y, \cdots y^{n-1})$ durch D_y wird bekanntlich

$$D_{\dot{\eta}} = \dot{H}^2 D_y = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \dot{H}^2 N\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

wenn $\dot{H}$ die oben definierte Substitutionsdeterminante und $N\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ die Norm der Ableitung von $f(y, x)$ nach y ist.

Zwei Basissysteme des Gebiets wird man äquivalent heißen, wenn sie gegenseitig in homogener linearer Form mit ganzen Wurzelausdrücken als Koeffizienten darstellbar sind:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_i &= \dot{g}_{i1} \dot{\zeta}_1 + \dot{g}_{i2} \dot{\zeta}_2 + \cdots + \dot{g}_{in} \dot{\zeta}_n \\ \dot{\zeta}_i &= \dot{G}_{i1} \dot{\eta}_1 + \dot{G}_{i2} \dot{\eta}_2 + \cdots + \dot{G}_{in} \dot{\eta}_n \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \cdots n).$$

Wie leicht zu erkennen ist, gilt auch hier der Satz, daß die beiden äquivalenten Basissysteme $(\dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \cdots \dot{\zeta}_n)$ und $(\dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \cdots \dot{\eta}_n)$ bis auf eine multiplikative Konstante dieselbe Diskriminante besitzen.

Unter einem Modul

$$\dot{a} = [\dot{a}_1, \dot{a}_2, \cdots \dot{a}_m]$$

sei die Gesamtheit der Nebenfunktionen des Gebiets verstanden, welche sich in der Form

$$\dot{\alpha} = \dot{G}_1 \dot{a}_1 + \dot{G}_2 \dot{a}_2 + \cdots + \dot{G}_m \dot{a}_m$$

---

[1]) Dedekind und Weber, Journal für Math. Bd. 92 S. 188.

mit ganzen Wurzelausdrücken als Koeffizienten darstellen lassen. Als Basis des Moduls wird dann $(\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \cdots \dot{\alpha}_m)$ bezeichnet. Der Begriff des Moduls von Nebenfunktionen unterscheidet sich also von dem im Journal für Math. Bd. 92 von den Herren Dedekind und Weber verwendeten Begriff des Moduls algebraischer Funktionen dadurch, daß sich die zum Modul gehörigen Formen nicht notwendig durch Addition und Subtraktion reproduzieren.

4. Umformung der Basis eines Moduls.

Für die Basis eines Moduls kann man verschiedene Systeme verwenden, welche gegenseitig in homogener linearer Form mit ganzen Wurzelausdrücken als Koeffizienten darstellbar sind. Zur Umformung der Basis eines Moduls wird man zweckmäßiger Weise nach dem Vorgang von Herrn Mertens[1]) folgende Überlegungen gleich für die allgemeineren Nebenfunktionen anstellen.

I. Lassen sich m Nebenfunktionen $\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \cdots \dot{\beta}_m$ in der Form

$$\dot{\beta}_k = \dot{b}_{ks}\,\dot{\zeta}_s + \dot{b}_{k,s-1}\,\dot{\zeta}_{s-1} + \cdots + \dot{b}_{k1}\,\dot{\zeta}_1 \quad (k = 1, 2, \cdots m)$$

mit Wurzelausdrücken als Koeffizienten durch s andere linear unabhängige[2]) *Nebenfunktionen $\dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \cdots \dot{\zeta}_s$ darstellen, so kann man eine Nebenfunktion*

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_s &= \dot{c}_s\,\dot{\zeta}_s + \dot{c}_{s,s-1}\,\dot{\zeta}_{s-1} + \cdots + \dot{c}_{s1}\,\dot{\zeta}_1 \\ &= \dot{q}_1\,\dot{\beta}_1 + \dot{q}_2\,\dot{\beta}_2 + \cdots + \dot{q}_m\,\dot{\beta}_m\end{aligned}$$

derart bestimmen, daß $\dot{c}_s$ der größte gemeinsame Teiler von $\dot{b}_{1s}, \dot{b}_{2s}, \cdots \dot{b}_{ms}$ ist und $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots \dot{q}_m$ ganze Wurzelausdrücke sind.

Hat $\dot{c}_s$ die angegebene Eigenschaft, so ergeben sich aus

$$\dot{b}_{ks} = \dot{c}_s\,\dot{B}_{ks}$$

---

[1]) Wiener Sitzungsberichte Bd. 102 S. 501.

[2]) Als „linear unabhängig" sollen die Nebenfunktionen $\dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \cdots \dot{\zeta}_s$ dann gelten, wenn zwischen ihnen keine Beziehung

$$\dot{u}_1\,\dot{\zeta}_1 + \dot{u}_2\,\dot{\zeta}_2 + \cdots + \dot{u}_s\,\dot{\zeta}_s = 0$$

besteht, außer in dem Fall, daß die Wurzelausdrücke $\dot{u}_1, \dot{u}_2, \cdots \dot{u}_s$ alle gleich Null sind.

m teilerfremde Wurzelausdrücke $\dot{B}_{1s}, \dot{B}_{2s}, \cdots \dot{B}_{ms}$, und es lassen sich nach Art. 1 m ganze Wurzelausdrücke

$$\dot{q}_k = q_k \dot{s}(\dot{B}_{ks}) \qquad (k = 1, 2, \cdots m)$$

derart bestimmen, daß

$$\dot{q}_1 \dot{b}_{1s} + \dot{q}_2 \dot{b}_{2s} + \cdots + \dot{q}_m \dot{b}_{ms} = \dot{c}_s$$

wird.

Nun seien β_k bezw. ζ_i zu $\dot{\beta}_k$ bezw. $\dot{\zeta}_i$ gehörige algebraische Funktionen, und zwar sei

$$\dot{\beta}_k = \dot{b}_k \beta_k \qquad (k = 1, 2, \cdots m),$$
$$\dot{\zeta}_i = \dot{z}_i \zeta_i \qquad (i = 1, 2, \cdots s),$$

wo $\dot{b}_k$ und $\dot{\beta}_k$, sowie $\dot{z}_i$ und $\dot{\zeta}_i$ je denselben Rest und dasselbe Supplement besitzen, dann haben nach der Darstellung von $\dot{\beta}_k$ die Wurzelausdrücke $\dot{b}_k$, $\dot{b}_{ks}\dot{z}_s$, $\dot{b}_{k,s-1}\dot{z}_{s-1}$, $\cdots \dot{b}_{k1}\dot{z}_1$ je für denselben Wert von k denselben Rest $\dot{r}(\dot{b}_k)$, weil sonst $\dot{\beta}_k$ keine Nebenfunktion wäre. Die Produkte

$$\dot{q}_k \dot{\beta}_k = q_k \dot{s}(\dot{B}_{ks}) \dot{\beta}_k \qquad (k = 1, 2, \cdots m)$$

werden so nach Division durch $\dot{s}(\dot{B}_{ks})\dot{b}_k$, bezw. durch $\dot{s}(\dot{B}_{ks})\dot{b}_{ks}\dot{z}_s = \dot{s}(\dot{B}_{ks})\dot{B}_{ks}\dot{c}_s\dot{z}_s$, somit nach Division durch $\dot{c}_s\dot{z}_s$ zu algebraischen Funktionen, d. h. es ist die Form

$$\dot{\eta}_s = \dot{q}_1\dot{\beta}_1 + \dot{q}_2\dot{\beta}_2 + \cdots + \dot{q}_m\dot{\beta}_m = \dot{c}_s\dot{\zeta}_s + \dot{c}_{s,s-1}\dot{\zeta}_{s-1} + \cdots + \dot{c}_{s1}\dot{\zeta}_1$$

eine Nebenfunktion, und diese Nebenfunktion erfüllt die Bedingungen, welche in I angegeben sind.

Auch die Differenzen

$$\dot{\vartheta}_k = \dot{\beta}_k - \dot{B}_{ks}\dot{\eta}_s \qquad (k = 1, 2, \cdots m)$$

sind Nebenfunktionen, da die Produkte $\dot{B}_{ks}\dot{\eta}_s$ nach Division durch $\dot{B}_{ks}\dot{c}_s\dot{z}_s = \dot{b}_{ks}\dot{z}_s$ oder nach Division durch $\dot{b}_k$ ebenso wie $\dot{\beta}_k$ zu algebraischen Funktionen werden. Infolge der Beziehung

$$\dot{b}_{ks} = \dot{c}_s\dot{B}_{ks} \qquad (k = 1, 2, \cdots m)$$

erhält $\dot{\vartheta}_k$ die Darstellung

$$\dot{\vartheta}_k = \dot{t}_{k,s-1}\dot{\zeta}_{s-1} + \dot{t}_{k,s-2}\dot{\zeta}_{s-2} + \cdots + \dot{t}_{k1}\dot{\zeta}_1 \qquad (k = 1, 2, \cdots m)$$

mit Wurzelausdrücken als Koeffizienten, wobei die Nebenfunktion $\dot{\zeta}_s$ fehlt.

Betrachtet man die Gleichungen für $\dot{\eta}_s, \dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \cdots \dot{\vartheta}_m$, so ist ersichtlich, daß der Modul

$$\dot{\mathfrak{b}} = [\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \cdots \dot{\beta}_m]$$

sich auch durch die Basis $(\dot{\eta}_s, \dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \cdots \dot{\vartheta}_m)$ definieren läßt, indem $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots \dot{q}_m$ sowie $\dot{B}_{1s}, \dot{B}_{2s}, \cdots \dot{B}_{ms}$ ganze Wurzelausdrücke sind, also die Nebenfunktionen der beiden Basissysteme gegenseitig in homogener linearer Form mit ganzen Wurzelausdrücken als Koeffizienten darstellbar sind.

Die Nebenfunktionen $\dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \cdots \dot{\vartheta}_m$ enthalten nur noch $\dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \cdots \dot{\zeta}_{s-1}$ und man kann daher jetzt ebenso $(m+1)$ Nebenfunktionen, nämlich

$$\dot{\eta}_{s-1} = \dot{c}_{s-1}\,\dot{\zeta}_{s-1} + \dot{c}_{s-1,\,s-2}\,\dot{\zeta}_{s-2} + \cdots + \dot{c}_{s-1,1}\,\dot{\zeta}_1$$

und $\dot{\sigma}_1, \dot{\sigma}_2, \cdots \dot{\sigma}_m$ derart bestimmen, daß die Formen $\dot{\sigma}_1, \dot{\sigma}_2, \cdots \dot{\sigma}_m$ die Nebenfunktion $\dot{\zeta}_{s-1}$ nicht mehr enthalten und der Modul $[\dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \cdots \dot{\vartheta}_m]$ auch durch $[\dot{\eta}_{s-1}, \dot{\sigma}_1, \dot{\sigma}_2, \cdots \dot{\sigma}_m]$ oder der Modul $\dot{\mathfrak{b}}$ durch $[\dot{\eta}_s, \dot{\eta}_{s-1}, \dot{\sigma}_1, \dot{\sigma}_2, \cdots \dot{\sigma}_m]$ definiert werden kann. In dieser Weise kann man fortfahren und wird schließlich eine Basis $(\dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \cdots \dot{\eta}_s)$ erhalten, wo

$$\dot{\eta}_i = \dot{c}_i\,\dot{\zeta}_i + \dot{c}_{i,\,i-1}\,\dot{\zeta}_{i-1} + \cdots + \dot{c}_{i1}\,\dot{\zeta}_1 \qquad (i = 1, 2, \cdots s)$$

nur noch $\dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \cdots \dot{\zeta}_i$ enthält und $(\dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \cdots \dot{\eta}_s)$ eine Basis des Moduls $\dot{\mathfrak{b}} = [\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \cdots \dot{\beta}_m]$ bildet, da das Verfahren mit $\dot{\eta}_1$ ein Ende nimmt. Somit gilt der Satz:

II. Der Modul $\dot{\mathfrak{b}}$, dessen ursprüngliche Basis durch die Nebenfunktionen

$$\dot{\beta}_k = \dot{b}_{ks}\,\dot{\zeta}_s + \dot{b}_{k,\,s-1}\,\dot{\zeta}_{s-1} + \cdots + \dot{b}_{k1}\,\dot{\zeta}_1 \qquad (k = 1, 2, \cdots m)$$

gebildet wird, wo die Nebenfunktionen $\dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \cdots \dot{\zeta}_s$ linear unabhängig sind (S. 17), kann durch eine Basis $(\dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \cdots \dot{\eta}_s)$ definiert werden, in welcher $\dot{\eta}_i$ nur die Nebenfunktionen $\dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \cdots \dot{\zeta}_i$ enthält:

$$\dot{\eta}_i = \dot{c}_i\,\dot{\zeta}_i + \dot{c}_{i,\,i-1}\,\dot{\zeta}_{i-1} + \cdots + \dot{c}_{i1}\,\dot{\zeta}_1 \qquad (i = 1, 2, \cdots s).$$

Daraus ergeben sich zwei weitere Sätze:

III. Sind $(\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \cdots \dot{\beta}_n)$ und $(\dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \cdots \dot{\zeta}_n)$ zwei Basissysteme des Gebiets, so ist $(\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \cdots \dot{\beta}_n)$ einer dritten Basis $(\dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \cdots \dot{\eta}_n)$ äquivalent, wo η_k die Form besitzt:

$$\dot{\eta}_k = \dot{c}_k\,\dot{\zeta}_k + \dot{c}_{k,\,k-1}\,\dot{\zeta}_{k-1} + \cdots \dot{c}_{k1}\,\dot{\zeta}_1 \qquad (k = 1, 2, \cdots n).$$

IV. Jede Basis des Gebiets und damit jede Basis des Körpers ist einer anderen $(\dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \cdots \dot{\eta}_n)$ *äquivalent, wo* $\dot{\eta}_k$ *in* y *gerade bis zum* $(k-1)^{ten}$ *Grad ansteigt:*

$$\dot{\eta}_k = \dot{c}_k y^{k-1} + \dot{c}_{k,k-1} y^{k-2} + \cdots \dot{c}_{k1} \qquad (k = 1, 2, \cdots n).$$

Die Diskriminante $D_{\dot{\eta}}$ *dieser Basis hat den Wert*

$$D_{\dot{\eta}} = (\dot{c}_1 \dot{c}_2 \cdots \dot{c}_n)^2 D_y.$$

Besteht die ursprüngliche Basis aus lauter algebraischen Funktionen, so wird die neue Basis nach dem angegebenen Verfahren auch aus lauter algebraischen Funktionen bestehen.

5. Nebenfundamentalsystem.

Eine aus ganzen algebraischen Funktionen bestehende Basis $(\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n)$, zu deren Modul

$$\mathfrak{o} = [\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n]$$

alle ganzen algebraischen Funktionen des Körpers gehören, wird bekanntlich ein Fundamentalsystem genannt. Eine aus ganzen Nebenfunktionen bestehende Basis des Gebiets, deren Diskriminante eine Konstante ist, hat ganz ähnliche Eigenschaften und soll als Nebenfundamentalsystem bezeichnet sein. Setzt man einstweilen die Existenz eines Nebenfundamentalsystems voraus, so gilt folgender Satz:

V. Ein Nebenfundamentalsystem $(\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \cdots \dot{\omega}_n)$ *besteht aus lauter fundamentalen Nebenfunktionen (S. 12). Sein Modul* $\dot{\mathfrak{o}} = [\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \cdots \dot{\omega}_n]$ *umfaßt alle ganzen Nebenfunktionen des Gebiets und damit alle ganzen algebraischen Funktionen des Körpers.*

Daß $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \cdots \dot{\omega}_n$ fundamentale Nebenfunktionen sein müssen, ergibt sich unmittelbar. Würde ferner die ganze Nebenfunktion

$$\dot{\omega} = \dot{e}_1 \dot{\omega}_1 + \dot{e}_2 \dot{\omega}_2 + \cdots + \dot{e}_n \dot{\omega}_n$$

nicht zum Modul $\dot{\mathfrak{o}} = [\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \cdots \dot{\omega}_n]$ gehören, wäre also etwa $\dot{e}_i$ ein gebrochener Wurzelausdruck, so würde die Basis der ganzen Nebenfunktionen $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \cdots \dot{\omega}_{i-1}, \dot{\omega}, \dot{\omega}_{i+1}, \cdots \dot{\omega}_n$ einen gebrochenen Wurzelausdruck $\dot{e}_i^2 D_{\dot{\omega}}$ als Diskriminante besitzen, da die Diskriminante $D_{\dot{\omega}}$ des Nebenfundamentalsystems nach Definition konstant ist. Dies ist aber ausgeschlossen.

VI. Bilden n fundamentale Nebenfunktionen $(\mathring{\omega}_1, \omega_2, \cdots \omega_n)$ *ein Nebenfundamentalsystem, so bilden die nächst höheren zugehörigen algebraischen Funktionen* $(\omega_1', \omega_2', \cdots \omega_n')$ *ein Fundamentalsystem*[1]) *und die nächst niederen* $(\omega_1'', \omega_2'', \cdots \omega_n'')$ *eine solche Basis, deren Modul alle Funktionen des Körpers umfaßt, welche im Endlichen höchstens integrabel unendlich werden.*

Unter einer Funktion, die im Endlichen höchstens integrabel unendlich wird, ist dabei eine solche verstanden, die für einen endlichen Wert $x = c$ höchstens wie $(x - c)^{-a}$ $(a < 1)$ unendlich wird.

Nun läßt sich nach V. jede ganze algebraische Funktion ω des Körpers in die Form

$$\omega = \dot{g}_1 \mathring{\omega}_1 + \dot{g}_2 \mathring{\omega}_2 + \cdots + \dot{g}_n \mathring{\omega}_n$$

$$= \frac{\dot{r}(\dot{g}_1)}{\dot{s}(\omega_1)} g_1'' \omega_1' + \frac{\dot{r}(\dot{g}_2)}{\dot{s}(\omega_2)} g_2'' \omega_2' + \cdots + \frac{\dot{r}(\dot{g}_n)}{\dot{s}(\omega_n)} g_n'' \omega_n'$$

bringen. Hierbei sind $\dot{g}_1, \dot{g}_2, \cdots \dot{g}_n$ ganze Wurzelausdrücke und folglich die nächst niederen rationalen Funktionen $g_1'', g_2'', \cdots g_n''$ jedenfalls ganz. Da ferner $\omega, \omega_1', \omega_2', \cdots \omega_n'$ ganze algebraische Funktionen von x sind, so müssen die Quotienten

$$\frac{\dot{r}(\dot{g}_1)}{\dot{s}(\omega_1)}, \quad \frac{\dot{r}(\dot{g}_2)}{\dot{s}(\omega_2)}, \cdots \frac{\dot{r}(\dot{g}_n)}{\dot{s}(\omega_n)}$$

rationale Funktionen von x sein. Weil aber Zähler und Nenner reduzierte Wurzelausdrücke sind, so können diese Quotienten nur konstante Werte besitzen. Damit ist bewiesen, daß jede ganze algebraische Funktion des Körpers zum Modul $\mathfrak{o}' = [\omega_2', \omega_2', \cdots \omega_n']$ gehört und so $(\omega_1', \omega_2', \cdots \omega_n')$ ein Fundamentalsystem bildet. Ebenso läßt sich jede Funktion ω'', welche im Endlichen höchstens integrabel unendlich wird, in die Form

$$\omega'' = \dot{h}_1 \mathring{\omega}_1 + \dot{h}_2 \mathring{\omega}_2 + \cdots \dot{h}_n \mathring{\omega}_n$$

$$= \frac{\dot{r}(\omega_1)}{\dot{r}(\dot{h}_1)} h_1' \omega_1'' + \frac{\dot{r}(\omega_2)}{\dot{s}(\dot{h}_2)} h_2' \omega_2'' + \cdots + \frac{\dot{r}(\omega_n)}{\dot{s}(\dot{h}_n)} h_n' \omega_n''$$

bringen, wo wieder aus denselben Gründen wie vorhin die Quotienten

---

[1]) Ein derartiges Fundamentalsystem nennt Herr Hensel im Journal für Mathematik Bd. 117 kanonisch, in dem Buche über algebraische Funktionen normal (vgl. Art. 11).

$\frac{\dot{r}(\omega_k)}{\dot{s}(\dot{h}_k)}$ konstant sind. Nun gehören alle algebraischen Funktionen $\omega_k'' = \frac{\mathring{\omega}_k}{\dot{s}(\omega_k)}$ jedenfalls zu den Funktionen, welche im Endlichen höchstens integrabel unendlich werden. Andererseits muß sich ein reduzierter Wurzelausdruck derart finden lassen, daß sein Produkt mit ω'' eine ganze Nebenfunktion gibt. Infolgedessen können sich die Ausdrücke $\dot{h}_1, \dot{h}_2, \cdots \dot{h}_n$ nur durch reduzierte Wurzelausdrücke von ganzen Wurzelausdrücken unterscheiden, d. h. es sind $h_1' = \dot{h}_1 \dot{s}(\dot{h}_1)$, $h_2' = \dot{h}_2 \dot{s}(\dot{h}_2), \cdots h_n' = \dot{h}_n \dot{s}(\dot{h}_n)$ ganze rationale Funktionen von x, womit der Satz VI jetzt vollständig bewiesen ist.

So ist beim binomischen Körper mit der Grundgleichung

$$f(y, x) = y^n + a_n = 0$$

die Basis $(1, \mathring{y}, \mathring{y}^2, \cdots \mathring{y}^{n-1})$ ein Nebenfundamentalsystem, da $\mathring{y} = \frac{y}{\dot{t}(y)}$ einer Gleichung

$$\mathring{y}^n + 1 = 0$$

genügt und so die Diskriminante $D_{\mathring{y}}^{\circ}$ konstant ist. Nach VI ist dann $(1, y, (y^2)', \cdots (y^{n-1})')$ ein Fundamentalsystem.

Hat z. B. $f(y, x) = 0$ die Gestalt

$$y^4 = \frac{(x^2 - 1)(x^3 + 1)^2}{x^3},$$

so wird (s. S. 12 und 13)

$$\mathring{y} = \frac{y x^{\frac{3}{4}}}{(x-1)^{\frac{1}{4}}(x+1)^{\frac{3}{4}}(x^2 - x + 1)^{\frac{1}{2}}}, \qquad y' = yx,$$

$$\mathring{y}^2 = \frac{y^2 x^{\frac{3}{2}}}{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{3}{2}}(x^2 - x + 1)}, \qquad (y^2)' = \frac{y^2 x^2}{x^3 + 1},$$

$$\mathring{y}^3 = \frac{y^3 x^{\frac{9}{4}}}{(x-1)^{\frac{3}{4}}(x+1)^{\frac{9}{4}}(x^2 - x + 1)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (y^3)' = \frac{y^3 x^3}{(x+1)(x^3+1)},$$

und es ist $\left(1, yx, \frac{y^2 x^2}{x^3+1}, \frac{y^3 x^3}{(x+1)(x^3+1)}\right)$ ein Fundamentalsystem.

Ebenso bilden die Funktionen $1, y'' = \frac{y}{(x-1)(x^3+1)}$, $(y^2)'' = \frac{y^2 x}{(x^2-1)(x^3+1)}$, $(y^3)'' = \frac{y^3 x^2}{(x^2-1)(x^3+1)^2}$ nach VI eine Basis, deren Modul alle Funktionen des Körpers umfaßt, welche im Endlichen höchstens integrabel unendlich werden.

6. Möglichkeit der Herstellung eines Nebenfundamentalsystems.

Unsere nächste Aufgabe wird darin bestehen, eine rationale Methode zur Herstellung eines Nebenfundamentalsystems anzugeben, um damit die beiden charakteristischen Basissysteme ebenso einfach wie beim binomischen Körper bilden zu können. Wir stützen uns dabei auf folgenden Satz:

VII. Läßt sich zu einer aus fundamentalen Nebenfunktionen bestehenden Basis $(\mathring{\zeta}_1, \mathring{\zeta}_2, \cdots \mathring{\zeta}_n)$, *deren Diskriminante* $D_{\mathring{\zeta}}$ *noch nicht konstant ist, stets eine andere* $(\mathring{\eta}_1, \mathring{\eta}_2, \cdots \mathring{\eta}_n)$ *wieder aus fundamentalen Nebenfunktionen bestehende Basis mit der Diskriminante* $D_{\mathring{\eta}}$ *bestimmen, daß die Nebenfunktionen* $\mathring{\zeta}_1, \mathring{\zeta}_2, \cdots \mathring{\zeta}_n$ *zum Modul* $\dot{\mathfrak{e}} = [\mathring{\eta}_1, \mathring{\eta}_2, \cdots \mathring{\eta}_n]$ *gehören, ohne daß die Basissysteme äquivalent wären, so muß man schließlich zu einem Nebenfundamentalsystem gelangen.*

Nach der Voraussetzung ist nämlich

$$D_{\mathring{\zeta}} = \dot{g}^2 D_{\mathring{\eta}}$$

und $\dot{g}$ ist dabei ein ganzer Wurzelausdruck, der nicht konstant sein kann, weil sonst die Basissysteme äquivalent wären. Da nun eine beliebige fundamentale Nebenfunktion $\mathring{\eta}$ den Wert $\mathring{\eta} = \frac{\eta}{\dot{t}(\eta)}$ besitzt und $\dot{t}(\eta)$ sich in der Form $h_1 h_2^{\frac{1}{2}} \cdots h_n^{\frac{1}{n}}$ darstellen läßt, wo $h_1, h_2, \cdots h_n$ rationale Funktionen von x sind, so hat die Diskriminante $D_{\mathring{\zeta}}$ ihrer Definition nach die Gestalt

$$D_{\mathring{\zeta}} = \Pi H_k^{\frac{1}{k}} \quad (k = 1, 2, \cdots m),$$

wo $H_1, H_2, \cdots H_m$ ganze rationale Funktion von x sind und m

höchstens den Wert n! annehmen kann. Da $D_{\dot\eta}$ wieder eine ähnliche Gestalt besitzt und ein Teiler von $D_{\dot\zeta}$ ist, so muß der nicht konstante Wurzelausdruck $\dot g$ mindestens gleich $h^{\frac{1}{m}-\frac{1}{m-1}}$ oder $h^{\frac{1}{m(m-1)}}$ sein, wenn h zum wenigsten ein Linearfaktor $x-c$, jedenfalls eine ganze rationale Funktion von x ist. Wenn also $D_{\dot\zeta}$ in x den ganzen oder gebrochenen Grad r erreicht, so sind höchstens $rm(m-1)$ Schritte nötig, um zu solchen fundamentalen Nebenfunktionen zu gelangen, die eine Basis mit konstanter Diskriminante oder ein Nebenfundamentalsystem bilden.

Damit wäre theoretisch ein bestimmter Weg angedeutet. Die praktische Durchführung und Vereinfachung bedingt noch weitere Überlegungen.

Nach 3. hat die Diskriminante $D_{\dot\zeta}$ einer Basis $(\dot\zeta_1, \dot\zeta_2, \cdots \dot\zeta_n)$ des Gebiets die Gestalt

$$D_{\dot\zeta} = \left| S(\dot\zeta_i \dot\zeta_k) \right| \qquad (i, k = 1, 2 \cdots n).$$

Alle in den h ersten Kolonnen dieser n-reihigen Determinante gelegenen Unterdeterminanten h^{ter} Ordnung besitzen einen größten gemeinsamen Teiler, welcher als der h^{te} Kolonnenkern von $D_{\dot\zeta}$ bezeichnet sei. Dieser Kolonnenkern ist stets dann ein ganzer Wurzelausdruck, wenn die Nebenfunktionen $\dot\zeta_1, \dot\zeta_2, \cdots \dot\zeta_n$ alle ganz und folglich die Spuren $S(\dot\zeta_i \dot\zeta_k)$ alle ganze Wurzelausdrücke sind. Für diesen Fall ist außerdem jeder vorhergehende Kolonnenkern ein Teiler des folgenden. Ferner gilt folgender Satz:

VIII. Sind in zwei Basissystemen $(\dot\alpha_1, \dot\alpha_2, \cdots \dot\alpha_n)$ *und* $(\dot\beta_1, \dot\beta_2, \cdots \dot\beta_n)$ *die Nebenfunktionen* $\dot\alpha_k$ *und* $\dot\beta_k$ *in y vom* $(k-1)^{ten}$ *Grad, und gehören die Nebenfunktionen* $\dot\alpha_1, \dot\alpha_2, \cdots \dot\alpha_n$ *zum Modul* $\mathfrak{b} = [\dot\beta_1, \dot\beta_2, \cdots \dot\beta_n]$, *so sind die Kolonnenkerne von* $D_{\dot\beta}$ *Teiler der entsprechenden von* $D_{\dot\alpha}$.

Da nämlich $\dot\alpha_k$ zum Modul $\mathfrak{b}$ gehört und $\dot\alpha_k$ wie $\dot\beta_k$ in y den $(k-1)^{ten}$ Grad besitzt, so gilt eine Darstellung:

$$\dot\alpha_k = \dot G_k \dot\beta_k + \dot G_{k,k-1} \dot\beta_{k-1} + \cdots + \dot G_{k1} \dot\beta_1 \qquad (k = 1, 2, \cdots n),$$

in welcher $\dot G_k, \dot G_{k,k-1}, \cdots \dot G_{k1}$ ganze Wurzelausdrücke sind. Infolgedessen sind die Determinanten der Matrix

$$\| S(\dot\alpha_i \dot\alpha_k) \| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots n \\ k = 1, 2, \cdots h \end{pmatrix}$$

gleich den entsprechenden der Matrix

$$\| S(\dot{\alpha}_i \dot{\beta}_k) \| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots n \\ k = 1, 2, \cdots h \end{pmatrix}$$

multipliziert mit dem ganzen Wurzelausdruck $\dot{G}_1 \dot{G}_2 \cdots \dot{G}_h$. Setzt man in der letzten Matrix wieder für $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \cdots \dot{\alpha}_n$ die Werte ein, so ergibt sich, daß die Determinanten dieser Matrix durch die in den h ersten Kolonnen von $D_{\dot{\beta}}$ gelegenen h-reihigen Unterdeterminanten in homogener linearer Form mit ganzen Wurzelausdrücken als Koeffizienten darstellbar sind. Umsomehr ist der h^{te} Kolonnenkern von $D_{\dot{\beta}}$ ein Teiler des entsprechenden von $D_{\dot{\alpha}}$.

In der Diskriminante der Basis $(1, \mathring{y}, \cdots \mathring{y}^{n-1})$ ist sicher der erste Kolonnenkern konstant. Aus dieser Basis werden nun nach und nach aus lauter fundamentalen Nebenfunktionen bestehende Systeme abgeleitet, in deren Diskriminante weitere Kolonnenkerne konstant sind, bis man schließlich mit konstantem n^{tem} Kolonnenkern ein Nebenfundamentalsystem erhält.

7. Rationale Herstellung eines Nebenfundamentalsystems.

Die allgemeine Herstellung eines Nebenfundamentalsystems erfordert die mehrmalige Durchführung folgender zwei Operationen, deren Möglichkeit nachher mit weiteren Angaben bewiesen werden soll.

IX. Eine Basis des Gebiets, deren Diskriminante einen konstanten $(h-1)^{ten}$ Kolonnenkern besitzt, und die selbst aus lauter fundamentalen Nebenfunktionen $\mathring{\zeta}_1, \mathring{\zeta}_2, \cdots \mathring{\zeta}_n$ besteht, in der ferner die Produkte

$$\mathring{\zeta}_i \mathring{\zeta}_k \qquad (i, k = 1, 2, \cdots n)$$

noch nicht alle zum Modul $\dot{\mathfrak{z}} = [\mathring{\zeta}_1, \mathring{\zeta}_2, \cdots \mathring{\zeta}_n]$ gehören, läßt sich durch eine andere, ebenso beschaffene Basis $(\mathring{\eta}_1, \mathring{\eta}_2, \cdots \mathring{\eta}_n)$ des Gebiets ersetzen, so daß $\mathring{\zeta}_1, \mathring{\zeta}_2, \cdots \mathring{\zeta}_n$ und alle Produkte

$$\mathring{\eta}_i \mathring{\eta}_k \qquad (i, k = 1, 2, \cdots n)$$

zum Modul $\dot{\mathfrak{e}} = [\mathring{\eta}_1, \mathring{\eta}_2, \cdots \mathring{\eta}_n]$ gehören.

X. In der so gewonnenen Basis $(\mathring{\eta}_1, \mathring{\eta}_2, \cdots \mathring{\eta}_n)$, deren Diskriminante nach VIII wie $D_{\mathring{\zeta}}$ einen konstanten $(h-1)^{ten}$ Kolonnenkern besitzt, sei der l^{te} Kolonnenkern $\dot{K}_l$ von $D_{\mathring{\eta}}$ der kleinste,

welcher nicht konstant ist, also $l \geqq h$. *Dann läßt sich eine fundamentale Nebenfunktion*

$$\mathring{\beta}_l = \dot{b}_l \mathring{\eta}_l + \dot{b}_{l-1} \mathring{\eta}_{l-1} + \cdots + \dot{b}_1 \mathring{\eta}_1$$

so bestimmen, daß $\frac{1}{\dot{b}_l}$ *ein ganzer Wurzelausdruck und mindestens gleich* $\dot{K}_l^{\frac{1}{n}}$ *ist. Setzt man hierauf* $\mathring{\beta}_l$ *in der Basis* $(\mathring{\eta}_1, \mathring{\eta}_2 \cdots \mathring{\eta}_n)$ *an die Stelle von* $\mathring{\eta}_l$, *so ist die Diskriminante der neuen Basis mindestens um den ganzen Wurzelausdruck* $\dot{K}_l^{\frac{2}{n}}$ *verringert.*

Nach dem Beweis zu VII muß man mit mehrmaliger Anwendung dieser Operationen schließlich zu einem Nebenfundamentalsystem gelangen.

In IX ist von den Produkten $\mathring{\zeta}_i \mathring{\zeta}_k$ vorausgesetzt, daß sie noch nicht alle zum Modul $\dot{\mathfrak{z}} = [\mathring{\zeta}_1, \mathring{\zeta}_2, \cdots \mathring{\zeta}_n]$ gehören. Sie bilden zusammen mit den Nebenfunktionen $\mathring{\zeta}_1, \mathring{\zeta}_2, \cdots \mathring{\zeta}_n$ die Basis eines neuen Moduls, der auch aus lauter ganzen Nebenfunktionen besteht. Dieser kann nach II durch eine andere Basis $(\dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \cdots \dot{\vartheta}_n)$ definiert werden, in welcher $\dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \cdots \dot{\vartheta}_n$ notwendig auch ganze Nebenfunktionen sind und von $\dot{\vartheta}_k$ nach IV der $(k-1)^{te}$ Grad in y vorausgesetzt werden darf. Ebenso darf und soll von $\mathring{\zeta}_k$ der $(k-1)^{te}$ Grad in y von vornherein vorausgesetzt werden. Nach VIII ist damit $D_{\dot{\vartheta}}$, und umso mehr $D_{\mathring{\vartheta}}$, die Diskriminante des Systems $\mathring{\vartheta}_1, \mathring{\vartheta}_2, \cdots \mathring{\vartheta}_n$ der zu $\dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \cdots \dot{\vartheta}_n$ gehörigen fundamentalen Nebenfunktionen, ein Teiler von $D_{\dot{\eta}}$. Falls die Produkte $\mathring{\vartheta}_i \mathring{\vartheta}_k$ noch nicht alle zum Modul $[\mathring{\vartheta}_1, \mathring{\vartheta}_2, \cdots \mathring{\vartheta}_n]$ gehören, kann man mit $(\mathring{\vartheta}_1, \mathring{\vartheta}_2, \cdots \mathring{\vartheta}_n)$ ebenso wie mit $(\mathring{\zeta}_1, \mathring{\zeta}_2, \cdots \mathring{\zeta}_n)$ vorgehen und das Verfahren, durch das die Diskriminante immer kleiner wird, muß schließlich nach mehrmaliger Reduktion in der angegebenen Weise den in IX gewünschten Abschluß finden. Denn nach dem Beweis zu Satz VII erhält man durch Übergang von Systemen zu solchen mit immer kleinerer Diskriminante, wenn diese Systeme wie hier $(\mathring{\zeta}_1, \mathring{\zeta}_2, \cdots \mathring{\zeta}_n)$ und $(\mathring{\vartheta}_1, \mathring{\vartheta}_2, \cdots \mathring{\vartheta}_n)$ aus lauter fundamentalen Nebenfunktionen bestehen, schließlich ein System mit konstanter Diskriminante, ein Nebenfundamentalsystem. Also kommt man durch mehrmalige Reduktion in der angegebenen Weise entweder zu einem Nebenfundamental-

system oder es läßt sich diese Reduktion nicht mehr anwenden, indem die Produkte der Basisfunktionen zu deren Modul gehören.

In X gehören die Produkte $\mathring{\eta}_i \mathring{\eta}_k$ zum Modul $\dot{e} = [\mathring{\eta}_1, \mathring{\eta}_2, \cdots \mathring{\eta}_n]$, der $(l-1)^{te}$ Kolonnenkern $\dot{K}_l$ von $D_{\mathring{\eta}}$ ist gerade noch konstant und von der fundamentalen Nebenfunktion $\mathring{\eta}_k$ kann der $(k-1)^{te}$ Grad in y vorausgesetzt werden. Nun stellen wir folgende Überlegungen an.

In der Diskriminante

$$D_{\mathring{\eta}} = \left| S(\mathring{\eta}_i \mathring{\eta}_k) \right| \qquad (i, k = 1, 2 \cdots n)$$

sei $\dot{H}^{(l)}$ eine der l-reihigen Unterdeterminanten aus den l ersten Kolonnen von $D_{\mathring{\eta}}$ und $\dot{\eta}_{i1} = S(\mathring{\eta}_i \mathring{\eta}_1)$, $\dot{\eta}_{i2} = S(\mathring{\eta}_i \mathring{\eta}_2)$, $\cdots \dot{\eta}_{il} = S(\mathring{\eta}_i \mathring{\eta}_l)$ seien die l Elemente einer und derselben Zeile von $\dot{H}^{(l)}$. Dann gilt eine Beziehung:

$$\dot{H}^{(l)} = \dot{\eta}_{i1} \dot{H}_1^{(l)} + \dot{\eta}_{i2} \dot{H}_2^{(l)} + \cdots + \dot{\eta}_{i1} \dot{H}_1^{(l)},$$

wo $\dot{H}_1^{(l)}, \dot{H}_2^{(l)}, \cdots \dot{H}_l^{(l)}$ je die zu den Elementen $\dot{\eta}_{i1}, \dot{\eta}_{i2}, \cdots \dot{\eta}_{i1}$ gehörigen Unterdeterminanten von $\dot{H}^{(l)}$ sind.

Setzt man hierauf

$$\dot{\alpha}_r = \mathring{\eta}_1 \dot{H}_{1r}^{(l)} + \mathring{\eta}_2 \dot{H}_{2r}^{(l)} + \cdots + \mathring{\eta}_l \dot{H}_{lr}^{(l)} \qquad (r = 1, 2 \cdots m),$$

wo r die $m = \binom{n}{l}$ möglichen Kombinationen für die zusammengehörigen in denselben Zeilen gelegenen Unterdeterminanten $\dot{H}_1^{(l)}$, $\dot{H}_2^{(l)}, \cdots \dot{H}_r^{(l)}$ durchläuft, so erkennt man durch Übergang zu den algebraischen Funktionen, die je zu den fundamentalen Nebenfunktionen $\mathring{\eta}_k$ gehören,[1]) daß die Formen $\dot{\alpha}_r$ Nebenfunktionen, d. h. Produkte aus algebraischen Funktionen und Wurzelausdrücken sind.

Da der größte gemeinsame Teiler der Unterdeterminanten $\dot{H}_1^{(l)}$ mit dem $(l-1)^{ten}$ Kolonnenkern von $D_{\mathring{\eta}}$ identisch und somit konstant ist, so kann man nach I. m ganze Wurzelausdrücke $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots \dot{q}_m$ derart bestimmen, daß

$$\dot{\beta}_l = \dot{q}_1 \dot{\alpha}_1 + \dot{q}_2 \dot{\alpha}_2 + \cdots + \dot{q}_m \dot{\alpha}_m = \mathring{\eta}_l + \frac{\dot{b}_{l-1}}{\dot{b}_l} \mathring{\eta}_{l-1} + \cdots + \frac{\dot{b}_1}{\dot{b}_l} \mathring{\eta}_1$$

---

[1]) Die Ausdrücke $\dot{\alpha}_r$ lassen sich auch in Determinantenform anschreiben, wie auf S. 32 angegeben ist. Aus der dortigen Darstellung und mit der dortigen Bezeichnung erhellt, daß $\dot{\alpha}_r$ mit dem Produkte der Supplemente von $\mathring{\eta}_1, \mathring{\eta}_2, \cdots \mathring{\eta}_{l_1}$, $\mathring{\eta}_{i_1}, \mathring{\eta}_{i_2}, \cdots \mathring{\eta}_{i_{l-1}}$ zu multiplizieren ist, damit aus der Determinante, d. h. aus $\dot{\alpha}_r$, eine algebraische Funktion wird.

den Koeffizienten Eins von $\mathring{\eta}_1$ besitzt. Von dieser Nebenfunktion $\dot{\beta}_1$ kann nun in der Tat der gesuchte Nachweis erbracht werden, daß sie mindestens durch $\dot{K}_1^{\frac{1}{n}}$ teilbar ist, wo $\dot{K}_1$ den 1^{ten} Kolonnenkern von $D_{\mathring{\eta}}$ bedeutet, der nach Voraussetzung gerade nicht mehr konstant ist.

Die Nebenfunktionen $\dot{a}_1, \dot{a}_2, \cdots \dot{a}_m$ sind nämlich einzeln mindestens durch $\dot{K}_1^{\frac{1}{n}}$ teilbar. Denn mit den Produkten $\mathring{\eta}_i \mathring{\eta}_k$ gehören auch die Produkte aus $3, 4, \cdots$ überhaupt beliebig vielen der Nebenfunktionen $\mathring{\eta}_1, \mathring{\eta}_2, \cdots \mathring{\eta}_n$ und damit auch die Potenzen $\dot{a}_r, \dot{a}_r^2 \cdots \dot{a}_r^{n-1}$ zum Modul $\dot{e} = [\mathring{\eta}_1, \mathring{\eta}_2, \cdots \mathring{\eta}_n]$.

Bildet man jetzt die Spuren

$$S(\mathring{\eta}_i \dot{a}_r) \quad (i = 1, 2, \cdots n;\ r = 1, 2, \cdots m),$$

so sind diese nach der Darstellung von $\dot{a}_r$ entweder 1-reihige Unterdeterminanten von $D_{\mathring{\eta}}$, welche in den l ersten Kolonnen liegen, oder verschwinden sie identisch. Nach früherem werden daher die Spuren

$$S(\dot{a}_r^2),\ S(\dot{a}_r^3), \cdots S(\dot{a}_r^n) \qquad (r = 1, 2, \cdots m)$$

mindestens durch den größten gemeinsamen Teiler $\dot{K}_l$ der in den l ersten Kolonnen von $D_{\mathring{\eta}}$ gelegenen Unterdeterminanten l^{ter} Ordnung, den l^{ten} Kolonnenkern von $D_{\mathring{\eta}}$, algebraisch teilbar. Weil ferner $\mathring{\eta}_1$ vom o^{ten} Grad in y ist und somit nur konstant oder gleich Eins sein kann, so wird auch $S(\dot{a}_r)$ durch $\dot{K}_l$ teilbar. Stellt man jetzt die Gleichung für $\dot{a}_r$ mit dem Koeffizienten Eins von $\dot{a}_r^n$ auf, so sind offensichtlich alle andern Koeffizienten durch $\dot{K}_l$ und folglich $\dot{a}_r$ selbst mindestens durch $\dot{K}_l^{\frac{1}{n}}$ teilbar. Da $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots \dot{q}_m$ ganze Wurzelausdrücke sind, so muß demnach auch die ganze Nebenfunktion $\dot{\beta}_l$ mindestens durch $\dot{K}_1^{\frac{1}{n}}$ teilbar sein, und $\mathring{\beta}_l$ erfüllt hiermit die Bedingung von X.

Ausgehend von der Basis $(1, \mathring{y}, \cdots \mathring{y}^{n-1})$, wo der erste Kolonnenkern von $D_{\mathring{y}}$ konstant ist, gelangt man auf diese Weise zu einer Basis $(\mathring{\omega}_1, \mathring{\omega}_2, \cdots \mathring{\omega}_n)$, wo $\mathring{\omega}_k$ in y den $(k-1)^{ten}$ Grad besitzt und $D_{\mathring{\omega}}$ konstant ist. Auf die besondere Form dieses Nebenfundamentalsystems werden wir noch zurückkommen.

Falls der zweite Kolonnenkern von $D_{\mathring{y}}$ nicht auch konstant ist, kommt man mit der Substitution $\eta = n\,y + a_1$, angewendet auf die Grundgleichung

$$f(y, x) = y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

zu einer Basis $(1, \eta, \cdots \eta^{n-1})$, wo η einer Gleichung

$$\eta^n + b_2 \eta^{n-2} + \cdots + b_n = 0$$

mit verschwindendem Koeffizienten von η^{n-1} genügt. Man überzeugt sich leicht, daß der zweite Kolonnenkern der Diskriminante $D_{\mathring{\eta}}$ von $(1, \mathring{\eta}, \cdots \mathring{\eta}^{n-1})$ konstant ist, da die Koeffizienten der Gleichung für $\mathring{\eta}$ und damit gewisse Unterdeterminanten zweiter Ordnung in den zwei ersten Kolonnen von $D_{\mathring{\eta}}$ teilerfremd sind. Da $(1, \eta, \cdots \eta^{n-1})$ den Körper ebensogut definiert wie $(1, y, \cdots y^{n-1})$, so kann man bei der Behandlung gewisser Typen von Funktionenkörpern von vornherein eine Grundgleichung annehmen, wo der Koeffizient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz der abhängigen Veränderlichen verschwindet.

8. Kubischer Körper.

Bei dem kubischen Körper[1]) können wir nach früherem die Grundgleichung in der Gestalt

$$f(y, x) = y^3 + a_2 y + a_3 = 0$$

annehmen, wo a_2 und a_3 beliebige rationale Funktionen von x sind. Der größte gemeinsame Teiler von $a_2^{\frac{1}{2}}$ und $a_3^{\frac{1}{3}}$ ist der algebraische Teiler $\dot{t}(y)$ von y. Die zu y gehörige fundamentale Nebenfunktion $\mathring{y} = \frac{y}{\dot{t}(y)}$ genügt einer Gleichung

$$\mathring{y}^3 + \dot{a}_2 \mathring{y} + \dot{a}_3 = 0,$$

wo $\dot{a}_2$ und $\dot{a}_3$ teilerfremde ganze Wurzelausdrücke sind:

$$\dot{a}_2 = \frac{a_2}{\dot{t}(y)^2}, \qquad \dot{a}_3 = \frac{a_3}{\dot{t}(y)^3}.$$

Man kann hier gleich die Operation X anwenden. Die Diskriminante von $(1, \mathring{y}, \mathring{y}^2)$ hat die Gestalt:

$$D_{\mathring{y}} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2\dot{a}_2 \\ 0 & -2\dot{a}_2 & -3\dot{a}_3 \\ -2\dot{a}_2 & -3\dot{a}_3 & 2\dot{a}_2^2 \end{vmatrix} = -(4\dot{a}_2^3 + 27\dot{a}_3^2).$$

---

[1]) Vgl. L. Baur, Math. Annalen Bd. 43. S. 505—520. Die Vereinfachung des dort z. T. angewandten Verfahrens gab die erste Veranlassung zur Benützung der „Nebenfunktionen“.

Von den in 7. eingeführten Nebenfunktionen $\dot{\alpha}_r$ braucht man hier nur folgende zwei:

$$\dot{\alpha}_1 = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2\dot{a}_2 \end{vmatrix} \mathring{y}^2 + \begin{vmatrix} 3 & -2\dot{a}_2 \\ 0 & -3\dot{a}_3 \end{vmatrix} \mathring{y} - \begin{vmatrix} 0 & -2\dot{a}_2 \\ -2\dot{a}_2 & -3\dot{a}_3 \end{vmatrix}$$
$$= 6\dot{a}_2 \mathring{y}^2 - 9\dot{a}_3 \mathring{y} + 4\dot{a}_2^2,$$

$$\dot{\alpha}_2 = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2\dot{a}_2 & -3\dot{a}_3 \end{vmatrix} \mathring{y}^2 + \begin{vmatrix} 3 & -2\dot{a}_2 \\ -2\dot{a}_2 & 2\dot{a}_2^2 \end{vmatrix} \mathring{y} - \begin{vmatrix} 0 & -2\dot{a}_2 \\ -3\dot{a}_3 & 2\dot{a}_2^2 \end{vmatrix}$$
$$= 9\dot{a}_3 \mathring{y}^2 + 2\dot{a}_2^2 \mathring{y} + 6\dot{a}_2 \dot{a}_3 .$$

Diese genügen den Gleichungen:

$$\dot{\alpha}_1^3 + 3\dot{a}_2 D_{\mathring{y}} \dot{\alpha}_1 - D_{\mathring{y}}^2 = 0,$$
$$\dot{\alpha}_2^3 - \dot{a}_2^2 D_{\mathring{y}} \dot{\alpha}_2 - \dot{a}_3 D_{\mathring{y}}^2 = 0,$$

d. h. die beiden Nebenfunktionen $\dot{\alpha}_1$ und $\dot{\alpha}_2$ sind durch $D_{\mathring{y}}^{\frac{1}{2}}$ teilbar. Nun haben die Wurzelausdrücke $6\dot{a}_2$ und $9\dot{a}_3$ einen konstanten gemeinsamen Teiler. Man kann also nach 1. zwei ganze Wurzelausdrücke $\dot{q}_1$ und $\dot{q}_2$ so bestimmen, daß

$$6\dot{a}_2 \dot{q}_1 + 9\dot{a}_3 \dot{q}_2 = 1$$

ist, also

$$\dot{\beta}_3 = \dot{q}_1 \dot{\alpha}_1 + \dot{q}_2 \dot{\alpha}_2 = \mathring{y}^2 + \dot{B}_1 \mathring{y} + \dot{B}_2$$

den Koeffizienten Eins von $\mathring{y}^2$ erhält und wie $\dot{\alpha}_1$ und $\dot{\alpha}_2$ durch $D_{\mathring{y}}^{\frac{1}{2}}$ teilbar ist.

Dadurch erhält die Basis $\left(1, \mathring{y}, \frac{\dot{\beta}_3}{D_{\mathring{y}}^{\frac{1}{2}}}\right)$ eine konstante Diskriminante, bildet also selbst ein Nebenfundamentalsystem. Deshalb ist auch

$$\mathring{\beta}_3 = \frac{\dot{\beta}_3}{D_{\mathring{y}}^{\frac{1}{2}}}$$

die zu $\dot{\beta}_3$ gehörige fundamentale Nebenfunktion. Nach Satz VI wird dann $(1, y', \beta_3')$ ein Fundamentalsystem, wo

$$y' = \mathring{y}\, \dot{s}(y) \quad \text{und} \quad \beta_3' = \mathring{\beta}_3\, \dot{s}(\beta_3)$$

die nächst höheren zu $\mathring{y}$ und $\mathring{\beta}_3$ gehörigen algebraischen Funktionen und $\dot{s}(y)$ wie $\dot{s}(\beta_3)$ reduzierte Wurzelausdrücke sind. Die Diskriminante des Fundamentalsystems, die sogen. Körperdiskriminante, erhält damit bis auf eine multiplikative Konstante den Wert

$$[\dot{s}(y)\,\dot{s}(\beta_3)]^2,$$

indem die Diskriminante des Nebenfundamentalsystems $(1, \mathring{y}, \mathring{\beta}_3)$ konstant ist.

Ein Beispiel möge die Ausführungen veranschaulichen. Die Grundgleichung oder, bei geometrischer Deutung, die Gleichung der Grundkurve sei

$$f(y,x) = y^3 - 3x^4 y - 2x^4(x^4 + 3x^2 + 1) = 0.$$

Dann hat die zu y gehörige fundamentale Nebenfunktion den Wert

$$\mathring{y} = \frac{y}{x^{\frac{4}{3}}}.$$

Ferner wird

$$\begin{aligned} \dot{a}_2 &= -3x^{\frac{4}{3}}, \qquad \dot{a}_3 = -2(x^4 + 3x^2 + 1), \\ D_{\mathring{y}} &= -(27\dot{a}_3^2 + 4\dot{a}_2^3) \\ &= -4 \cdot 27\left[(x^4 + 3x^2 + 1)^2 - x^4\right] \\ &= -4 \cdot 27\,(x^2 + 1)^2 (x^4 + 4x^2 + 1). \end{aligned}$$

Die beiden Nebenfunktionen $\dot{\alpha}_1$ und $\dot{\alpha}_2$ erhalten bis auf eine multiplikative Konstante die Gestalt:

$$\dot{\alpha}_1 = -x^{\frac{4}{3}}\mathring{y}^2 + (x^4 + 3x^2 + 1)\,\mathring{y} + 2x^{\frac{8}{3}},$$

$$\dot{\alpha}_2 = (x^4 + 3x^2 + 1)\,\mathring{y}^2 - x^{\frac{8}{3}}\mathring{y} - 2x^{\frac{4}{3}}(x^4 + 3x^2 + 1),$$

und sind beide durch $D_{\mathring{y}}^{\frac{1}{2}}$ oder durch

$$(x^2 + 1)(x^4 + 4x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

teilbar. Nun besteht die Beziehung

$$x^4 + 3x^2 + 1 - x^2(x^2 + 3) = 1,$$

also ist die gesuchte Nebenfunktion

$$\dot{\beta}_3 = \dot{\alpha}_2 + x^{\frac{2}{3}}(x^2 + 3)\,\dot{\alpha}_1 = \mathring{y}^2 + x^{\frac{2}{3}}\mathring{y}(x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 3) - 2x^{\frac{4}{3}}$$

und die zugehörige fundamentale Nebenfunktion

$$\mathring{\beta}_3 = \frac{y^2 + x^2 y\,(x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 3) - 2x^4}{x^{\frac{8}{3}}\,(x^2+1)\,(x^4+4x^2+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Da nach den gegebenen Erörterungen $(1, \mathring{y}, \mathring{\beta}_3)$ ein Nebenfundamentalsystem ist, so wird nach V. die Basis

$$\left(1, y' = \frac{y}{x} = \mathring{y}\,x^{\frac{1}{3}},\ \beta_3' = \mathring{\beta}_3\,x^{\frac{2}{3}}\,(x^4+4x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

ein Fundamentalsystem und die Körperdiskriminante erhält den Wert

$$[\dot{s}\,(y)\,\dot{s}\,(\beta_3)]^2 = x^2\,(x^4+4x^2+1).$$

Setzt man noch

$$\omega_3' = \beta_3' - x\,y'\,(x^4+5x^2+4) + 2 = \frac{y^2 - x^2 y - 2x^2}{x^2\,(x^2+1)},$$

so sind die Systeme $(1, y', \beta_3')$ und $(1, y', \omega_3')$ äquivalent, d. h. auch $(1, y', \omega_3')$ bildet ein Fundamentalsystem.

9. Nachträgliche Vereinfachungen.

Durch die beiden Operationen IX und X wurde ganz allgemein ein Nebenfundamentalsystem $(\mathring{\omega}_1, \mathring{\omega}_2, \cdots \mathring{\omega}_n)$ bestimmt, in welchem $\mathring{\omega}_k$ den $(k-1)^{ten}$ Grad in y besitzt. Denkt man sich dieses System schon hergestellt und setzt auch von dem System $(\mathring{\eta}_1, \mathring{\eta}_2, \cdots \mathring{\eta}_n)$ in X voraus, daß $\mathring{\eta}_k$ in y den $(k-1)^{ten}$ Grad besitzt, was in dem Verfahren selbst verwendet wurde, so gilt eine Darstellung:

$$\mathring{\eta}_k = \dot{G}_k\,\mathring{\omega}_k + \dot{G}_{k,\,k-1}\,\mathring{\omega}_{k-1} + \cdots + \dot{G}_{k1}\,\mathring{\omega}_1, \quad (k = 1, 2, \cdots n),$$

wo die Koeffizienten ganze Wurzelausdrücke sind. Die Koeffizienten $\dot{G}_1, \dot{G}_2, \cdots \dot{G}_{l-1}$ müssen dabei nach dem Beweis von IX konstant sein, da in $D_{\mathring{\omega}}$ alle und in $D_{\mathring{\eta}}$ nach der Voraussetzung von X die $(l-1)$ ersten Kolonnenkerne konstant sind.

Nun haben die in 7. hauptsächlich benötigten Nebenfunktionen $\dot{a}_r$ die Gestalt

$$\dot{a}_r = \begin{vmatrix} S(\mathring{\eta}_{i_1}\mathring{\eta}_1) & S(\mathring{\eta}_{i_1}\mathring{\eta}_2) & \cdots & S(\mathring{\eta}_{i_1}\mathring{\eta}_l) \\ S(\mathring{\eta}_{i_2}\mathring{\eta}_1) & S(\mathring{\eta}_{i_2}\mathring{\eta}_2) & \cdots & S(\mathring{\eta}_{i_2}\mathring{\eta}_l) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S(\mathring{\eta}_{i_{l-1}}\mathring{\eta}_1) & S(\mathring{\eta}_{i_{l-1}}\mathring{\eta}_2) & \cdots & S(\mathring{\eta}_{i_{l-1}}\mathring{\eta}_l) \\ \mathring{\eta}_1 & \mathring{\eta}_2 & \cdots & \mathring{\eta}_l \end{vmatrix},$$

wo $i_1, i_2, \cdots i_{l-1}$ irgend welche Kombinationen von $(l-1)$ unter einander verschiedenen der Indices $1, 2, \cdots n$ bedeuten. Von diesen Nebenfunktionen wurde nachgewiesen, daß sie mindestens durch $\dot{K}_l^{\frac{1}{n}}$ teilbar sind, wo $\dot{K}_l$ der l^{te} Kolonnenkern von D_y° ist. Tatsächlich sind sie durch den für sie größtmöglichen Wurzelausdruck $\dot{G}_l$ teilbar. Setzt man nämlich für $\mathring{\eta}_1, \mathring{\eta}_2, \cdots \mathring{\eta}_l$ die Werte ein und bedenkt, daß $\dot{G}_1, \dot{G}_2, \cdots \dot{G}_{l-1}$ konstant ist, so ergibt sich bis auf eine multiplikative Konstante

$$\dot{a}_r = \dot{G}_l \begin{vmatrix} S(\mathring{\eta}_{i_1}\mathring{\omega}_1) & S(\mathring{\eta}_{i_1}\mathring{\omega}_2) & \cdots & S(\mathring{\eta}_{i_1}\mathring{\omega}_l) \\ S(\mathring{\eta}_{i_2}\mathring{\omega}_1) & S(\mathring{\eta}_{i_2}\mathring{\omega}_2) & \cdots & S(\mathring{\eta}_{i_2}\mathring{\omega}_l) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S(\mathring{\eta}_{i_{l-1}}\mathring{\omega}_1) & S(\mathring{\eta}_{i_{l-1}}\mathring{\omega}_2) & \cdots & S(\mathring{\eta}_{i_{l-1}}\mathring{\omega}_l) \\ \mathring{\omega}_1 & \mathring{\omega}_2 & \cdots & \mathring{\omega}_l \end{vmatrix},$$

d. h. $\dot{a}_r$ ist durch $\dot{G}_l$ teilbar, weil die Determinante offensichtlich eine ganze Nebenfunktion darstellt.

Damit wird aber auch

$$\dot{\beta}_l = \dot{q}_1\dot{a}_1 + \dot{q}_2\dot{a}_2 + \cdots + \dot{q}_m\dot{a}_m = \mathring{\eta}_l + \frac{\dot{b}_{l-1}}{\dot{b}_l}\mathring{\eta}_{l-1} + \cdots + \frac{\dot{b}_1}{\dot{b}_l}\mathring{\eta}_1$$

durch $\dot{G}_l$ teilbar und $\mathring{\beta}_l$ erhält die Gestalt

$$\mathring{\beta}_l = \mathring{\omega}_l + \dot{B}_{l-1}\mathring{\omega}_{l-1} + \cdots + \dot{B}_1\mathring{\omega}_1,$$

wenn man die Darstellung von $\mathring{\eta}_k$ durch $\mathring{\omega}_1, \mathring{\omega}_2, \cdots \mathring{\omega}_k$ bedenkt. Setzt man darauf $\mathring{\beta}_l$ in der Basis $(\mathring{\eta}_1, \mathring{\eta}_2, \cdots \mathring{\eta}_n)$ an die Stelle von $\mathring{\eta}_l$ und wendet wieder das Verfahren IX an, so muß man, nachdem dies zu Ende geführt ist, zu einer Basis mit konstantem l^{tem} Kolonnenkern gelangen. Denn andernfalls könnte man X nochmals anwenden und würde eine ganze Nebenfunktion erhalten, welche bei Darstellung durch $\mathring{\omega}_1, \mathring{\omega}_2, \cdots \mathring{\omega}_n$ einen gebrochenen Wurzelausdruck als Koeffizienten von $\mathring{\omega}_l$ besäße, was nicht möglich ist.

Man muß also die beiden Operationen IX und X je nur einmal hintereinander anwenden, um von konstantem $(l-1)^{tem}$ Kolonnenkern zu konstantem l^{tem} Kolonnenkern zu gelangen. Ist insbesondere der $(n-1)^{te}$ Kolonnenkern von D_y° konstant, wie es bei dem kubischen Körper der Fall war, so ist $\dot{G}_n^2 = D_y^\circ$ und man muß

nur noch das Verfahren X anwenden, um zu einem Nebenfundamentalsystem zu gelangen.

10. Trinomischer Körper.

Der vorhin erwähnte Fall tritt beim trinomischen Körper ein, wenn man darunter einen solchen mit der Grundgleichung

$$f(y, x) = y^n + a_{n-1} y + a_n = 0$$

versteht. Denn hier ist der $(n-1)^{te}$ Kolonnenkern von D_y° konstant. Infolge der bekannten Rekursionsformeln verschwinden nämlich in der Diskriminante D_y° alle auftretenden Potenzsummen bis auf

$$S(1) = n,\ S(\mathring{y}^{n-1}),\ S(\mathring{y}^n),\ S(\mathring{y}^{2n-2}),$$

und es wird

$$D_y^\circ = \begin{vmatrix} n & 0 & \cdots & 0 & S(\mathring{y}^{n-1}) \\ 0 & 0 & \cdots & S(\mathring{y}^{n-1}) & S(\mathring{y}^n) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & S(\mathring{y}^{n-1}) & \cdots & 0 & 0 \\ S(\mathring{y}^{n-1}) & S(\mathring{y}^n) & \cdots & 0 & S(\mathring{y}^{2n-2}) \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{n}} (n^n \dot{a}_n^{n-1} + (n-1)^{n-1} \dot{a}_{n-1}^n).$$

Hier sind aber zwei $(n-1)$ reihige Unterdeterminanten in den $(n-1)$ ersten Kolonnen bis aufs Vorzeichen gleich $n\,S(\mathring{y}^{n-1})^{n-2}$, bezw. $n\,S(\mathring{y}^n)^{n-2}$ und diese Potenzen sind wie $S(\mathring{y}^{n-1})$ und $S(\mathring{y}^n)$, bezw. $\dot{a}_{n-1}$ und $\dot{a}_n$ teilerfremd, d. h. der $(n-1)^{te}$ Kolonnenkern von D_y° ist konstant.

Ersetzt man in D_y° die Elemente der letzten und der zweiten Zeile durch $1, \mathring{y}, \mathring{y}^2, \cdots \mathring{y}^{n-1}$, so erhält man die beiden Nebenfunktionen $\dot{\alpha}_1$ und $\dot{\alpha}_2$, welche jene Unterdeterminanten als Koeffizienten von $\mathring{y}^{n-1}$ besitzen und nach den Erörterungen von 9. durch $D_y^{\circ\frac{1}{2}}$ teilbar sind. Es lassen sich dann wieder zwei ganze Wurzelausdrücke $\dot{q}_1$ und $\dot{q}_2$ derart bestimmen, daß

$$\dot{\beta}_n = \frac{1}{D_y^{\circ\frac{1}{2}}} (\dot{q}_1 \dot{\alpha}_1 + \dot{q}_2 \dot{\alpha}_2) = \frac{\mathring{y}^{n-1}}{D_y^{\circ\frac{1}{2}}} + \dot{B}_2 \mathring{y}^{n-2} + \cdots + \dot{B}_n$$

zusammen mit $1, \bar{y}, \cdots \bar{y}^{n-2}$ ein Nebenfundamentalsystem bildet. Die kleinsten zugehörigen ganzen algebraischen Funktionen

$$(1, y', \cdots (y^{n-2})', \beta_n')$$

bilden wieder ein Fundamentalsystem und die Körperdiskriminante erhält den Wert

$$[\dot{s}(y)\dot{s}(y^2)\cdots\dot{s}(y^{n-2})\dot{s}(\beta_n)]^2.$$

Der Funktionenkörper mit der Grundgleichung

$$y^n + a_1 y^{n-1} + a_n = 0$$

läßt sich durch die Substitution $\eta = \frac{1}{y}$ auf den vorigen zurückführen. Ähnlich kann man nachweisen, daß bei der Grundgleichung

$$y^n + a_{n-2} y^2 + a_{n-1} y + a_n = 0$$

die zweite Operation von 7. zweimal, die erste einmal anzuwenden ist.

11. Reduzierte Elementarteiler und Riemannsche Fläche.

Die rationale Herstellung eines Nebenfundamentalsystems führt nach V vor allem zu einem Fundamentalsystem[1]) und hängt so mit verschiedenen Fragen der Kurventheorie und der Theorie der Abelschen Integrale zusammen. Außerdem gewährt die Gestalt eines Nebenfundamentalsystems einen völligen Einblick in die Beschaffenheit der zur Grundgleichung gehörigen Riemannschen Fläche.

Wir bezeichnen eine Basis $(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n)$ als normal für eine Stelle $x = c$, wenn D_η durch $(x - c)^r$ und η_i durch $(x - c)^{r_i}$ teilbar ist, während gleichzeitig die Beziehung

$$r = 2(r_1 + r_2 + \cdots r_n)$$

besteht oder, anders ausgedrückt, wenn die zu $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ gehörigen fundamentalen Nebenfunktionen $\mathring{\eta}_1, \mathring{\eta}_2, \cdots \mathring{\eta}_n$ eine zu $(x - c)$ teilerfremde Diskriminante $D_{\mathring{\eta}}$ besitzen. Diese Definition stimmt mit den Ausführungen bei Hensel und Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln (S. 167) überein. So wird ein Fundamentalsystem $(\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n)$ dann für alle im Endlichen

[1]) Bezüglich anderer Verfahren zur Herstellung eines Fundamentalsystems vergleiche man besonders: Mertens, Wiener Sitzungsber. Bd. 102; Hensel, Journal für Mathematik Bd. 111; Hensel und Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln; Brill, Math. Annalen Bd. 64.

gelegenen Stellen $x = c$ normal, wenn die zugehörigen fundamentalen Nebenfunktionen $(\mathring{\omega}_1, \mathring{\omega}_2, \cdots \mathring{\omega}_n)$ ein Nebenfundamentalsystem bilden, weil hier $D_{\mathring{\omega}}$ konstant ist [vgl. S. 21, VI].

Nun kann von ω_k der $(k-1)^{te}$ Grad in y vorausgesetzt werden, während y selbst eine ganze algebraische Funktion von x sein soll. Dann besitzen die Funktionen des Fundamentalsystems die Gestalt

$$\omega_k = \frac{y^{k-1} + g_{k2} y^{k-2} + \cdots + g_{kk}}{g_k} = \frac{\gamma_k}{g_k} \quad (k = 1, 2, \cdots n),$$

wie schon Kronecker in Bd. 91 des Journals für Mathematik angegeben hat. Die ganzen rationalen Funktionen g_k hängen in der Weise zusammen, daß g_{k-1} ein Teiler von g_k ist. Damit erhalten die zugehörigen fundamentalen Nebenfunktionen die Gestalt

$$\mathring{\omega}_k = \frac{\omega_k}{\dot{s}(\omega_k)} = \frac{\gamma_k}{\dot{g}_k},$$

wo $\dot{s}(\omega_k) = \dot{r}(\dot{g}_k)$ ist. Dies ist folglich die Form des Nebenfundamentalsystems, welches in 7. bestimmt wurde, und es ist notwendig wieder $\dot{g}_{k-1}$ ein Teiler von $\dot{g}_k$.

Man kann noch nachweisen, daß die Systeme $(1, y, \cdots y^{n-1})$ und $(\dot{g}_1 \mathring{\omega}_1, \dot{g}_2 \mathring{\omega}_2, \cdots \dot{g}_n \mathring{\omega}_n)$ äquivalent sind.[1]) Daraus folgt aber, daß der h^{te} Determinantenteiler der aus den Konjugierten von $(1, y, \cdots y^{n-1})$ gebildeten Determinante den Wert $\dot{g}_1 \dot{g}_2 \cdots \dot{g}_h$ besitzt, indem die entsprechende Determinante von $(\mathring{\omega}_1, \mathring{\omega}_2, \cdots \mathring{\omega}_n)$ konstant ist. Der h^{te} Elementarteiler dieser Determinante wird hierauf gleich $\dot{g}_h$. Wenn also auf $x = c$ Verzweigungen der Ordnungen $a-1, b-1, c-1, \cdots$ liegen, so treten nach Hensel und Landsberg in den reduzierten Wurzelausdrücken

$$\dot{s}(\omega_1), \dot{s}(\omega_2), \cdots \dot{s}(\omega_n)$$

die gebrochenen Potenzen

$$(x-c)^{\frac{1}{a}}, \quad (x-c)^{\frac{2}{a}}, \cdots (x-c)^{\frac{a-1}{a}}, \cdots\cdots (x-c)^{\frac{c-1}{c}}, \cdots$$

auf, und die Nenner $\dot{g}_k$ des Nebenfundamentalsystems bezw. ihre Reste $\dot{r}(\dot{g}_k) = \dot{s}(\omega_k)$, die „reduzierten Elementarteiler", geben so Aufschluß über die Natur der Riemannschen Fläche, welche zur gegebenen Grundgleichung gehört.

Nach den Ausführungen von Hensel und Landsberg, die sich leicht auch aus dem Vorhergehenden bestätigen lassen, ist der

[1]) vgl. K. Fischer, Journal für Mathematik Bd. 117, S. 5 u. 6.

erste und zweite Elementarteiler

$$\dot{g}_1 = 1, \qquad \dot{g}_2 = \dot{t}\left(y + \frac{a_1}{n}\right), \quad \text{[vgl. S. 9]}$$

wenn y einer Gleichung

$$f(y, x) = y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

genügt, wo die Koeffizienten ganze rationale Funktionen von x sind. Ebenso ist nach einer Eigenschaft komplementärer Systeme

$$\frac{1}{\dot{g}_n} = \dot{t}\left(\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}\right),^{1)}$$

womit besonders auch der Generalnenner $\dot{g}_n$ der ganzen Nebenfunktionen bestimmt ist. Die übrigen Elementarteiler waren bisher nicht explicit bestimmt.

Wie die Nenner $\dot{g}_k$ des Nebenfundamentalsystems die Besonderheiten der algebraischen Kurven aufdecken können, möge das Beispiel von 8. zeigen. Hier ist die Grundkurve

$$f(y, x) = y^3 - 3x^4 y - 2x^4 (x^4 + 3x^2 + 1) = 0,$$

und die Nenner sind

$$\dot{g}_2 = x^{\frac{4}{3}}$$

$$\dot{g}_3 = x^{\frac{8}{3}} (x^2 + 1) (x^4 + 4x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}.$$

In geometrischer Deutung heißt dies, daß auf $x = 0$ ein dreifacher Punkt mit Verzweigung zweiter Ordnung liegt, daß sich auf den Abszissen $x^2 + 1 = 0$ je ein gewöhnlicher Doppelpunkt, auf $x^4 + 4x^2 + 1 = 0$ je ein gewöhnlicher Verzweigungspunkt befindet.

Zum Schluß möchte ich auch an dieser Stelle meinen verehrten Lehrern an der Universität Tübingen für die von ihnen mir zuteil gewordene vielfache Förderung meinen herzlichen Dank aussprechen, insbesondere Herrn Professor Dr. v. Brill, der mich auf das behandelte Problem aufmerksam gemacht, stets sein reges Interesse daran bezeigt und durch Betonung der Bildung von Beispielen mich dazu genötigt hat, jede wirkliche Irrationalität bei der gegebenen Lösung zu vermeiden und die Lösung selbst in ganz bestimmte, der Rechnung zugängliche Formen zu kleiden.

---

[1]) Hensel und Landsberg, Theorie der algebr. Funktionen S. 192—194 und 235.

Robert Noske, Borna-Leipzig, Großbetrieb für Dissertationsdruck.